2011年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

理科数学

一、填空题（56分）

1．函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=$____________ 。

2．若全集 $U=R$，集合 $A=\{x\,|\,x\ge 1\}\bigcup\{x\,|\,x\le 0\}$，则 $C_U A=$______________ 。

3．设 m 为常数，若点 $F(0,5)$ 是双曲线 $\dfrac{y^2}{m}-\dfrac{x^2}{9}=1$ 的一个焦点，则 $m=$___________ 。

4．不等式 $\dfrac{x+1}{x}<3$ 的解为______________________ 。

5．在极坐标系中，直线 $\rho(2\cos\theta+\sin\theta)=2$ 与直线 $\rho\cos\theta=$ 的夹角大小为____________ 。

6．在相距2千米的 A．B 两点处测量目标 C，若 $\angle CAB=75^0,\angle CBA=60^0$，则 A．C 两点之间的距离是______________ 千米。

7．若圆锥的侧面积为 2π，底面积为 π，则该圆锥的体积为____________ 。

8．函数 $y=\sin(\dfrac{\pi}{2}+x)\cos(\dfrac{\pi}{6}-x)$ 的最大值为______________ 。

9．马老师从课本上抄录一个随机变量 ε 的概率分布律如下表

x	1	2	3
$P(\varepsilon=x)$	**?**	**!**	**?**

请小牛同学计算 ε 的数学期望，尽管“!”处无法完全看清，且两个“？”处字迹模糊，但能肯

定这两个“？”处的数值相同。据此，小牛给出了正确答案 $E\varepsilon=$______________ 。

10．行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$（$a,b,c,d\in\{-1,1,2\}$）的所有可能值中，最大的是______________ 。

11．在正三角形 ABC 中，D 是 BC 上的点，$AB=3,BD=1$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$________ 。

12．随机抽取9个同学中，至少有2个同学在同一月出生的概率是_________（默认每月天数相同，结果精确到 0.001）。

13．设 $g(x)$ 是定义在 R 上．以1为周期的函数，若 $f(x)=x+g(x)$ 在 $[3,4]$ 上的值域为 $[-2,5]$，则 $f(x)$ 在区间 $[-10,10]$ 上的值域为__________________ 。

14．已知点 $O(0,0)$．$Q_0(0,1)$ 和 $R_0(3,1)$，记 Q_0R_0 的中点为 P_1，取 Q_0P_1 和 P_1R_0 中的一条，

记其端点为Q_1．R_1，使之满足$(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)<0$；记Q_1R_1的中点为P_2，取Q_1P_2和P_2R_1中的一条，记其端点为Q_2．R_2，使之满足$(|OQ_2|-2)(|OR_2|-2)<0$；依次下去，得到点$P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|Q_0P_n|=$____ 。

二、选择题（20 分）

15．若$a,b\in R$，且$ab>0$，则下列不等式中，恒成立的是〖答〗

（　　）

A．$a^2+b^2>2ab$　　　　B．$a+b\ge 2\sqrt{ab}$

C．$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$　　　　D．$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge 2$

16．下列函数中，既是偶函数，又是在区间$(0,+\infty)$上单调递减的函数为〖答〗

（　　）

A．$y=\ln\dfrac{1}{|x|}$　　B．$y=x^3$　　C．$y=2^{|x|}$　　D．$y=\cos x$

17．设A_1，A_2，A_3，A_4是空间中给定的 5 个不同的点，则使$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}+\overrightarrow{MA_5}=\vec{0}$成立的点$M$的个数为〖答〗

（　　）

A．0　　B．1　　C．5　　D．10

18. 设$\{a_n\}$是各项为正数的无穷数列，A_i是边长为a_i,a_{i+1}的矩形面积（$i=1,2,\cdots$），则$\{A_n\}$为等比数列的充要条件为〖答〗

（　　）

A．$\{a_n\}$是等比数列。

B．$a_1,a_3,\cdots,a_{2n-1},\cdots$或$a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$是等比数列。

C．$a_1,a_3,\cdots,a_{2n-1},\cdots$和$a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$均是等比数列。

D．$a_1,a_3,\cdots,a_{2n-1},\cdots$和$a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$均是等比数列，且公比相同。

三、解答题（74 分）

19.（12 分）已知复数 z_1 满足 $(z_1-2)(1+i)=1-i$（i 为虚数单位），复数 z_2 的虚部为 2，$z_1\cdot z_2$ 是实数，求 z_2。

20.（12 分）已知函数 $f(x)=a\cdot 2^x+b\cdot 3^x$，其中常数 a,b 满足 $ab\neq 0$。

（1）若 $ab>0$，判断函数 $f(x)$ 的单调性；

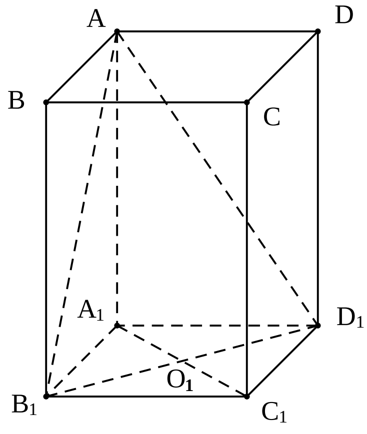
（2）若 $ab<0$，求 $f(x+1)>f(x)$ 时 x 的取值范围。

21.（14 分）已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是底面边长为 1 的正四棱柱，O_1 是 A_1C_1 和 B_1D_1 的交点。

（1）设 AB_1 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角的大小为 α，二面角 $A-B_1D_1-A_1$ 的大小为 β。

求证：$\tan\beta=\sqrt{2}\tan\alpha$；

（2）若点 C 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\dfrac{4}{3}$，求正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高。



22.（18 分）已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=3n+6$，$b_n=2n+7$（$n\in N^*$），将集合

$\{x\,|\,x=a_n,n\in N^*\}\cup\{x\,|\,x=b_n,n\in N^*\}$ 中的元素从小到大依次排列，构成数列

$c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n,\cdots$。

（1）求 c_1, c_2, c_3, c_4；

（2）求证：在数列$\{c_n\}$中．但不在数列$\{b_n\}$中的项恰为$a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$；

（3）求数列$\{c_n\}$的通项公式。

23．（18 分）已知平面上的线段l及点P，在l上任取一点Q，线段PQ长度的最小值称为点P到线段l的距离，记作$d(P, l)$。

（1）求点$P(1,1)$到线段$l: x-y-3=0(3 \le x \le 5)$的距离$d(P, l)$；

（2）设l是长为 2 的线段，求点集$D=\{P \mid d(P, l) \le 1\}$所表示图形的面积；

（3）写出到两条线段l_1, l_2距离相等的点的集合$\Omega=\{P \mid d(P, l_1)=d(P, l_2)\}$，其中

$l_1=AB, l_2=CD$，

A, B, C, D是下列三组点中的一组。对于下列三组点只需选做一种，满分分别是①2 分，②6 分，③8 分；若选择了多于一种的情形，则按照序号较小的解答计分。

① $A(1,3), B(1,0), C(-1,3), D(-1,0)$。

② $A(1,3), B(1,0), C(-1,3), D(-1,-2)$。

③ $A(0,1)B,\ (0,C0),\ (D,0)$。

参考答案

一、空题

1．$\dfrac{1}{x}+2$；2．$\{x\,|\,0<x<1\}$；3．16；4．$x<0$ 或 $x\geq\dfrac{1}{2}$；5．$\arccos\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$；6．$\sqrt{6}$；7．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$；

8．$\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$；9．2；10．6；11．$\dfrac{15}{2}$；12．0.985；13．$[-15,11]$；14．$\sqrt{3}$。

二、择题

15．D；16．A；17．B；18．D。

三、答题

19．解：$(z_1-2)(1+i)=1-i\Rightarrow z_1=2-i$ ………………（4 分）

设 $z_2=a+2i,a\in R$，则 $z_1z_2=(2-i)(a+2i)=(2a+2)+(4-a)i$，………………（12 分）

$\because$ $z_1z_2\in R$，$\therefore$ $z_2=4+2i$ ………………（12 分）

20．解：⑴ 当 $a>0,b>0$ 时，任意 $x_1,x_2\in R,x_1<x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=a(2^{x_1}-2^{x_2})+b(3^{x_1}-3^{x_2})$

$\because$ $2^{x_1}<2^{x_2},a>0\Rightarrow a(2^{x_1}-2^{x_2})<0$，$3^{x_1}<3^{x_2},b>0\Rightarrow b(3^{x_1}-3^{x_2})<0$，

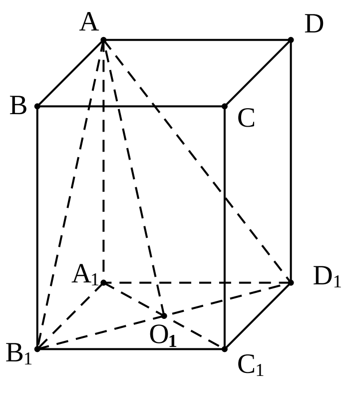
$\therefore$ $f(x_1)-f(x_2)<0$，函数 $f(x)$ 在 R 上是增函数。

当 $a<0,b<0$ 时，同理，函数 $f(x)$ 在 R 上是减函数。

⑵ $f(x+1)-f(x)=a\cdot 2^x+2b\cdot 3^x>0$

当 $a<0,b>0$ 时，$(\dfrac{3}{2})^x>-\dfrac{a}{2b}$，则 $x>\log_{1.5}(-\dfrac{a}{2b})$；

当 $a>0,b<0$ 时，$(\dfrac{3}{2})^x<-\dfrac{a}{2b}$，则 $x<\log_{1.5}(-\dfrac{a}{2b})$。



21．解：设正四棱柱的高为 h。

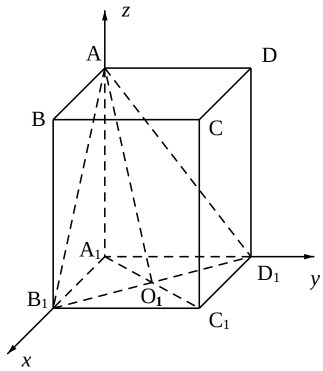
⑴ 连 AO_1，$AA_1\perp$ 底面 $A_1B_1C_1D_1$ 于 A_1，

$\therefore$ AB_1 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角为 $\angle AB_1A_1$，即 $\angle AB_1A_1=\alpha$

$\because$ $AB_1=AD_1$，O_1 为 B_1D_1 中点，$\therefore AO_1\perp B_1D_1$，又 $A_1O_1\perp B_1D_1$，

$\therefore$ $\angle AO_1A_1$ 是二面角 $A-B_1D_1-A_1$ 的平面角，即 $\angle AO_1A_1=\beta$

$\therefore$ $\tan\alpha=\dfrac{AA_1}{A_1B_1}=h$，$\tan\beta=\dfrac{AA_1}{A_1O_1}=\sqrt{2}h=\sqrt{2}\tan\alpha$。



⑵ 建立如图空间直角坐标系，有 $A(0,0,h),B_1(1,0,0),D_1(0,1,0),C(1,1,h)$

$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,-h),\overrightarrow{AD_1}=(0,1,-h),\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$

设平面 AB_1D_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\because$ $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB_1}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AD_1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\end{cases}$，取 $z=1$ 得 $\vec{n}=(h,h,1)$

$\therefore$ 点 C 到平面 AB_1D_1 的距离为 $d=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{h+h+0}{\sqrt{h^2+h^2+1}}=\dfrac{4}{3}$，则 $h=2$。

22．⑴ $c_1=9,c_2=11,c_3=12,c_4=$ ；

⑵ ① 任意 $n\in N^*$，设 $a_{2n-1}=3(2n-1)+6=6n+3=b_k=2k+7$，则 $k=3n-2$，即

$a_{2n-1}=b_{3n-2}$

② 假设 $a_{2n}=6n+6=b_k=2k+7\Leftrightarrow k=3n-\dfrac{1}{2}\in N^*$（矛盾），$\therefore$ $a_{2n}\notin\{b_n\}$

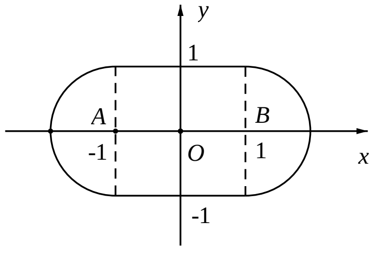
$\therefore$ 在数列 $\{c_n\}$ 中．但不在数列 $\{b_n\}$ 中的项恰为 $a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$。

⑶ $b_{3k-2}=2(3k-2)+7=6k+3=a_{2k-1}$，

$b_{3k-1}=6k+5$，$a_{2k}=6k+6$，$b_{3k}=6k+7$

$\because$ $6k+3<6k+5<6k+6<6k+7$

$\therefore$ 当 $k=1$ 时，依次有 $b_1=a_1=c_1,b_2=c_2,a_2=c_3,b_3=c_4$，……



$\therefore$ $c_n=\begin{cases}6k+3 & (n=4k-3)\\ 6k+5 & (n=4k-2)\\ 6k+6 & (n=4k-1)\\ 6k+7 & (n=4k)\end{cases},k\in N^*$。

23．解：⑴ 设 $Q(x,x-3)$ 是线段 $l:x-y-3=0(3\le x\le 5)$ 上一点，则

$|PQ|=\sqrt{(x-1)^2+(x-4)^2}=\sqrt{2(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{2}}(3\le x\le 5)$ ， 当 $x=3$ 时 ，

$d(\ P,=\ l)\ _{\mathrm{m}}\ \mathrm{I}R\sqrt{\ }_{\mathrm{n}}$。

⑵ 设线段 l 的端点分别为 A,B，以直线 AB 为 x 轴， AB 的中点为原点建立直角坐标系，

则 $A(-1,0),B(1,0)$，点集 D 由如下曲线围成

$l_1:y=1(|x|\le 1),l_2:y=-1(|x|\le 1)$ ，

$C_1:(x+1)^2+y^2=1(x\le -1),C_2:(x-1)^2+y^2=1(x\ge 1)$

其面积为 $S=4+\pi$ 。

⑶ ① 选择 $A(1,3),B(1,0),C(-1,3),D(-1,0)$ ， $\Omega=\{(x,y)\mid x=0\}$

② 选择 $A(1,3),B(1,0),C(-1,3),D(-1,-2)$ 。

$\Omega=\{(x,y)\mid x=0,y\ge 0\}\cup\{(x,y)\mid y^2=4x,-2\le y<0\}\cup\{(x,y)\mid x+y+1=0,x>1\}$

③ 选择 $A(0,1),B(0,0),C(0,0),D(2,0)$ 。

$\Omega=\{(x,y)\mid x\le 0,y\le 0\}\cup\{(x,y)\mid y=x,0<x\le 1\}$

$\cup\{(x,y)\mid x^2=2y-1,1<x\le 2\}\cup\{(x,y)\mid 4x-2y-3=0,x>2\}$