

一、填空题（本大题满分 56 分）本大题共 14 题，考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写答案，每个空格填对得 4 分，否则一律得零分。

1. 若全集 $U = R$ ，集合 $A = \{x | x \geq 1\}$ ，则 $C_U A =$ _____
2. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{3n}{n+3}) =$ _____
3. 若函数 $f(x) = 2x + 1$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$ ，则 $f^{-1}(-2) =$ _____
4. 函数 $y = 2\sin x - \cos x$ 的最大值为 _____
5. 若直线 l 过点 $(3, 4)$ ，且 $(1, 2)$ 是它的一个法向量，则直线 l 得方程为 _____
6. 不等式 $\frac{1}{x} < 1$ 的解为 _____
7. 若一个圆锥的主视图（如图所示）是边长为 3, 3, 2 的三角形，则该圆锥的侧面积为 _____
8. 在相距 2 千米的 A, B 两点处测量目标 C ，若 $\angle CAB = 75^\circ, \angle CBA = 60^\circ$ ，则 A, C 两点之间的距离是 _____ 千米.
9. 若变量 x, y 满足条件 $\begin{cases} 3x - y \leq 0 \\ x - 3y + 5 \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x + y$ 得最大值为 _____
10. 课题组进行城市空气质量调查，按地域把 24 个城市分成甲、乙、丙三组，对应的城市数分别为 4, 12, 8，若用分层抽样抽取 6 个城市，则丙组中应抽取的城市数为 _____
11. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} (a, b, c, d \in \{-1, 1, 2\})$ 所有可能的值中，最大的是 _____
12. 在正三角形 ABC 中， D 是边 BC 上的点，若 $AB = 3, BD = 1$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} =$ _____
13. 随机抽取的 9 位同学中，至少有 2 位同学在同一月份出生的概率为 _____（默认每个月的天数相同，结果精确到 0.001）
14. 设 $g(x)$ 是定义在 R 上，以 1 为周期的函数，若函数 $f(x) = x + g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的值域为 $[-2, 5]$ ，则 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的值域为 _____

二、选择题（本大题满分 20 分）本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案，考生应再答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分。

15. 下列函数中，既是偶函数，又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的函数是（ ）

(A) $y = x^{-2}$ (B) $y = x^{-1}$ (C) $y = x^2$ (D) $y = x^{\frac{1}{3}}$
16. 若 $a, b \in R$ ，且 $ab > 0$ ，则下列不等式中，恒成立的是（ ）

(A) $a^2 + b^2 > 2ab$ (B) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (C) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$ (D) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

17.若三角方程 $\sin x = 0$ 与 $\sin 2x = 0$ 的解集分别为 E, F , 则 ()

- (A) $E \cap F = \emptyset$ (B) $E \cup F$ (C) $E = F$ (D) $E \cap F = \emptyset$

18.设 A_1, A_2, A_3, A_4 是平面上给定的 4 个不同点, 则使 $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} = \vec{0}$ 成立的点 M 的个数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

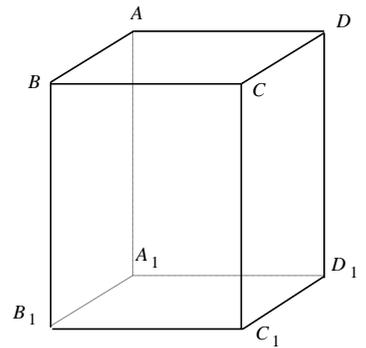
三、解答题 (本大题满分 74 分) 本大题共有 5 题, 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤

19. (本题满分 12 分) 已知复数 z_1 满足 $(z_1 - 2)(1 + i) = 1 - i$ (i 为虚数单位), 复数 z_2 的虚部为 2, 且 $z_1 \cdot z_2$ 是实数, 求 z_2

20. (本题满分 14 分, 第 1 小题 7 分, 第 2 小题 7 分)

已知 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是底面边长为 1 的正四棱柱, 高 $AA_1 = 2$, 求

- (1) 异面直线 BD 与 AB_1 所成角的大小 (结果用反三角函数值表示);
(2) 四面体 AB_1D_1C 的体积



21. (本题满分 14 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 8 分)

已知函数 $f(x) = a \cdot 2^x + b \cdot 3^x$, 其中常数 a, b 满足 $a \cdot b \neq 0$

- (1) 若 $a \cdot b > 0$, 判断函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $a \cdot b < 0$, 求 $f(x+1) > f(x)$ 时的 x 的取值范围.

22. (本题满分 16 分, 第 1 小题 4 分, 第 2 小题 6 分, 第 3 小题 6 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1$ (常数 $m > 1$), P 是曲线 C 上的动点, M 是曲线 C 上的右顶点,

定点 A 的坐标为 $(2, 0)$

- (1) 若 M 与 A 重合, 求曲线 C 的焦点坐标;
- (2) 若 $m = 3$, 求 $|PA|$ 的最大值与最小值;
- (3) 若 $|PA|$ 的最小值为 $|MA|$, 求实数 m 的取值范围.

23. (本题满分 18 分, 第 1 小题 4 分, 第 2 小题 6 分, 第 3 小题 8 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 3n + 6$, $b_n = 2n + 7$ ($n \in N^*$). 将集合 $\{x | x = a_n, n \in N^*\} \cup \{x | x = b_n, n \in N^*\}$ 中的元素从小到大依次排列, 构成数列

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$

- (1) 求三个最小的数, 使它们既是数列 $\{a_n\}$ 中的项, 又是数列 $\{b_n\}$ 中的项;
- (2) 数列 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{40}$ 中有多少项不是数列 $\{b_n\}$ 中的项? 请说明理由;
- (3) 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $4n$ 项和 S_{4n} ($n \in N^*$).

- 1、 $\{x|x < 1\}$; 2、 -2 ; 3、 $-\frac{3}{2}$; 4、 $\sqrt{5}$; 5、 $x+2y-11=0$;
 6、 $x < 0$ 或 $x > 1$; 7、 3π ; 8、 $\sqrt{6}$; 9、 $\frac{5}{2}$; 10、 2 ; 11、 6 ;
 12、 $\frac{15}{2}$; 13、 0.985 ; 14、 $[-2, 7]$ 。

15、A; 16、D; 17、A; 18、B。

19、解： $(z_1 - 2)(1+i) = 1-i \Rightarrow z_1 = 2-i$

设 $z_2 = a+2i, a \in R$ ，则 $z_1 z_2 = (2-i)(a+2i) = (2a+2) + (4-a)i$ ，

$\because z_1 z_2 \in R, \therefore z_2 = 4+2i$

20、解：(1) 连 BD, AB_1, B_1D_1, AD_1 ， $\because BD \parallel B_1D_1, AB_1 = AD_1$ ，

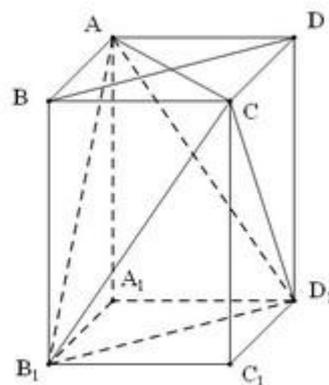
\therefore 异面直线 BD 与 AB_1 所成角为 $\angle AB_1D_1$ ，记 $\angle AB_1D_1 = \theta$ ，

$$\cos \theta = \frac{AB_1^2 + B_1D_1^2 - AD_1^2}{2AB_1 \times B_1D_1} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

\therefore 异面直线 BD 与 AB_1 所成角为 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$ 。

(2) 连 AC, CB_1, CD_1 ，则所求四面体的体积

$$V = V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} - 4 \times V_{C-B_1C_1D_1} = 2 - 4 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



21、解：(1) 当 $a > 0, b > 0$ 时，任意 $x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$ ，则 $f(x_1) - f(x_2) = a(2^{x_1} - 2^{x_2}) + b(3^{x_1} - 3^{x_2})$ 。

$\because 2^{x_1} < 2^{x_2}, a > 0 \Rightarrow a(2^{x_1} - 2^{x_2}) < 0, 3^{x_1} < 3^{x_2}, b > 0 \Rightarrow b(3^{x_1} - 3^{x_2}) < 0$ ，

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$ ，函数 $f(x)$ 在 R 上是增函数。

当 $a < 0, b < 0$ 时，同理，函数 $f(x)$ 在 R 上是减函数。

(2) $f(x+1) - f(x) = a \cdot 2^x + 2b \cdot 3^x > 0$ 。

当 $a < 0, b > 0$ 时， $(\frac{3}{2})^x > -\frac{a}{2b}$ ，则 $x > \log_{1.5}(-\frac{a}{2b})$ ；

当 $a > 0, b < 0$ 时， $(\frac{3}{2})^x < -\frac{a}{2b}$ ，则 $x < \log_{1.5}(-\frac{a}{2b})$ 。

22、解：(1) $m=2$ ，椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ， $c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ 。

∴ 左、右焦点坐标为 $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$ 。

(2) $m=3$ ，椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ，设 $P(x, y)$ ，则

$$|PA|^2 = (x-2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + 1 - \frac{x^2}{9} = \frac{8}{9}(x - \frac{9}{4})^2 + \frac{1}{2} \quad (-3 \leq x \leq 3)$$

∴ $x = \frac{9}{4}$ 时 $|PA|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ； $x = -3$ 时 $|PA|_{\max} = 5$ 。

(3) 设动点 $P(x, y)$ ，则

$$|PA|^2 = (x-2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + 1 - \frac{x^2}{m} = \frac{m^2-1}{m^2}(x - \frac{2m^2}{m^2-1})^2 - \frac{4m^2}{m^2-1} + 5 \quad (-m \leq x \leq m)$$

∴ 当 $x = m$ 时， $|PA|$ 取最小值，且 $\frac{m^2-1}{m^2} > 0$ ，∴ $\frac{2m^2}{m^2-1} \geq m$ 且 $m > 1$ 。

解得 $1 < m \leq 1 + \sqrt{2}$ 。

23、解：(1) 三项分别为 9, 15, 21。

(2) $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{40}$ 分别为

9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 36, 37,

39, 41, 42, 43, 45, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 55, 57, 59, 60, 61, 63, 65, 66, 67。

(3) $b_{3k-2} = 2(3k-2) + 7 = 6k + 3 = a_{2k-1}$ ， $b_{3k-1} = 6k + 5$ ， $a_{2k} = 6k + 6$ ， $b_{3k} = 6k + 7$ 。

∴ $6k + 3 < 6k + 5 < 6k + 6 < 6k + 7$ 。

$$\therefore c_n = \begin{cases} 6k+3 & (n=4k-3) \\ 6k+5 & (n=4k-2) \\ 6k+6 & (n=4k-1) \\ 6k+7 & (n=4k) \end{cases}, k \in \mathbb{N}^* \quad c_{4k-3} + c_{4k-2} + c_{4k-1} + c_{4k} = 24k + 21$$

$$S_{4n} = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) + \dots + (c_{4n-3} + c_{4n-2} + c_{4n-1} + c_{4n}) = 24 \times \frac{n(n+1)}{2} + 21n = 12n^2 + 33n$$