2010年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学（理科）

一、填空题（本大题满分 56 分）本大题共有 14 题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得 4 分，否则一律得零分。

1. 不等式$\dfrac{2-x}{x+4}>0$的解集是<u>（-4, 2）</u>。

解析：考查分式不等式的解法$\dfrac{2-x}{x+4}>0$等价于（x-2）(x+4)<0,所以-4<x<2

2. 若复数$z=1-2i$（i为虚数单位），则$z\cdot\overline{z}+z=$<u>6-2i</u>。

解析：考查复数基本运算$z\cdot\overline{z}+z=(1-2i)(1+2i)+1-2i=6-2i$

3. 动点P到点$F(2,0)$的距离与它到直线$x+2=0$的距离相等，则P的轨迹方程为<u>$y^2=8x$</u>。

解析：考查抛物线定义及标准方程

定义知P的轨迹是以$F(2,0)$为焦点的抛物线，p=2 所以其方程为y^2=8x

4. 行列式$\begin{vmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{6}\end{vmatrix}$的值是<u>0</u>。

解析：考查行列式运算法则$\begin{vmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{6}\end{vmatrix}=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{2}=0$

5. 圆$C:x^2+y^2-2x-4y+4=0$的圆心到直线 1：$3x+4y+4=0$的距离$d=$<u>3</u>。

解析：考查点到直线距离公式

圆心（1,2）到直线$3x+4y+4=0$距离为$\dfrac{|3\times1+4\times2+4|}{5}=3$

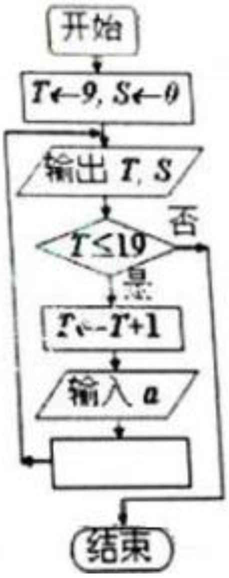
6. 随机变量ξ的概率分布率由下图给出：

x	7	8	9	10
$P(\xi = x)$	0.3	0.35	0.2	0.15

则随机变量ξ的均值是<u>　　8.2　　　　</u>

解析：考查期望定义式 Eξ=7×0.3+8×0.35+9×0.2+10×0.15=8.2

7. 2010年上海世博会园区每天9:00开园，20:00停止入园。在右边的框图中，S表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数，a表示整点报道前1个小时内入园人数，则



空白的执行框内应填入<u>　S ←S+a　　　</u>。

8. 对任意不等于1的正数a，函数 f(x)=$\log_a(x+3)$的反函数的图像都经过点P，则点P的坐标是<u>　（0，-2）　　　　</u>

解析：f(x)=$\log_a(x+3)$的图像过定点（-2,0），所以其反函数的图像过定点（0，-2）

9．从一副混合后的扑克牌（52张）中随机抽取1张，事件A为“抽得红桃K”，事件B为“抽得为黑桃”，则概率P（A∪B）==$\underline{\dfrac{7}{26}}$（结果用最简分数表示）

解析：考查互斥事件概率公式　P（A∪B）=$\dfrac{1}{52}+\dfrac{13}{52}=\dfrac{7}{26}$

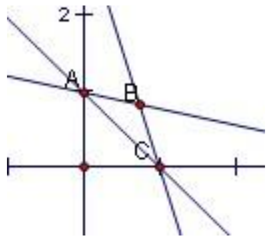
10．在n行n列矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$中，

记位于第i行第j列的数为$a_{ij}(i,j=1,2\cdots,n)$。当$n=9$时，$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}=$

45 。

解析：$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}=1+3+5+7+9+2+4+6+8=45$

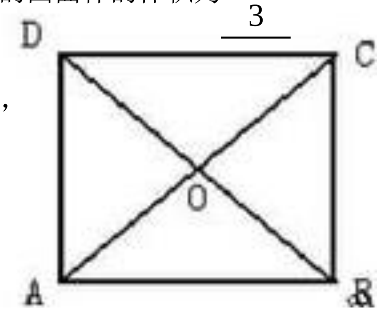
11．将直线$l_2: nx+y-n=0$、$l_3: x+ny-n=0$（$n\in N^*$，$n\geq 2$）x 轴、y 轴围成的封闭图形的面积记为S_n，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ 1 。



解析：B$(\dfrac{n}{n+1},\dfrac{n}{n+1})$ 所以 BO⊥AC，

$S_n=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{n}{n+1}\sqrt{2}=\dfrac{n}{n+1}$　　所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}$

12．如图所示，在边长为 4 的正方形纸片 ABCD 中，AC 与 BD 相交于 O,剪去$\triangle AOB$,将剩余部分沿 OC、OD 折叠，使 OA、OB 重合，则以 A、(B)、C、D、O 为顶点的四面体的体积为$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

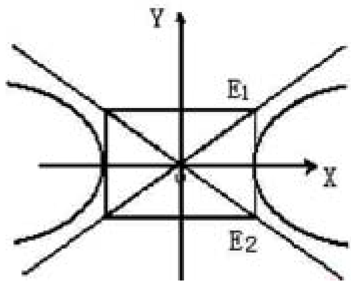


解析：翻折后的几何体为底面边长为 4，侧棱长为$2\sqrt{2}$的正三棱锥，

高为$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$所以该四面体的体积为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times16\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

13。如图所示，直线 x=2 与双曲线$\Gamma:\dfrac{\lambda^2}{4}-y^2=1$的渐近线交于$E_1$，$E_2$两点，记$\overrightarrow{OE_1}=\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OE_2}=\overrightarrow{e_2}$，任取双曲线Γ上的点 P，若$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ae_1},+\overrightarrow{be_2}(a、b\in R)$，则 a、b 满足的一个等式是 4ab=1

解析：$E_1(2,1),E_2(2,-1)$



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ae_1}+\overrightarrow{be_2}=(2a+2b,a-b)$，点 P 在双曲线上

$\therefore\dfrac{(2a+2b)^2}{4}-(a-b)^2=1$，化简得 $4ab=1$

14. 以集合 U=$\{a,\ b,\ c,\ d\}$的子集中选出 2 个不同的子集，需同时满足以下两个条件：

（1）a、b 都要选出；

（2）对选出的任意两个子集 A 和 B，必有$A\subseteq B$或$B\subseteq A$，那么共有 36 种不同的选法。

解析：列举法　共有 36 种

二．选择题（本大题满分 20 分）本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案。考生必须在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分。

15．“$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\left(k\in Z\right)$”是“$\tan x=1$”成立的　　　　　[答]（ A ）

（A）充分不必要条件.　　　　　　　　（B）必要不充分条件.

（C）充分条件.　　　　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件.

解析：$\tan(2k\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$，所以充分；

但反之不成立，如$\tan\frac{5\pi}{4}=1$，所以不必要

16. 直线 l 的参数方程是$\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-t\end{cases}(t\in R)$，则 l 的方向向量是$\overline{d}$　可以是　【答】(C)

(A)(1,2)　　　(B)(2,1)　　　(C)(-2,1)　　　(D)(1,-2)

解析：直线 l 的一般方程是$x+2y-5=0$，$k=-\frac{1}{2}$，所以 C 正确

17. 若x_0是方程$(\frac{1}{2})^x=x^{\frac{1}{3}}$的解，则$x_0$属于区间　　　【答】(C)

(A)($\frac{2}{3}$, 1)　　　(B)($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$)　　　(C)($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$)　　　(D)(0, $\frac{1}{3}$)

解析：结合图形$\because\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$，$\therefore x_0$属于区间($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$)

18. 某人要制作一个三角形，要求它的三条高的长度分别为$\frac{1}{13},\frac{1}{11},\frac{1}{5}$，则此人能　　　【答】(D)

（A）不能作出这样的三角形　　　　　　（B）作出一个锐角三角形

（C）作出一个直角三角形　　　　　　　（D）作出一个钝角三角形

解析：设三边分别为 a,b,c，利用面积相等可知

$$\frac{1}{13}a=\frac{1}{11}b=\frac{1}{5}c,\therefore a:b:c=13:11:5$$

由余弦定理得$\cos A=\frac{5^2+11^2-13^2}{2\times5\times11}<0$，所以角 A 为钝角

三、解答题（本大题满分 74 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

19.（本题满分 12 分）

已知$0<x<\frac{\pi}{2}$，化简：

$$\lg(\cos x\cdot\tan x+1-2\sin^2\frac{x}{2})+\lg[\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})]-\lg(1+\sin 2x).$$

=0

20. （本题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第一个小题满分 5 分，第 2 个小题满分 8 分。

已知数列 $\{a_n\}$ **的前** n **项和为** S_n，**且** $S_n = n - 5a_n - 85$，$n \in N^*$

（1）证明：$\{a_n - 1\}$ 是等比数列；

（2）求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式，并求出 n 为何值时，S_n 取得最小值，并说明理由。

（2）$S_n = n + 75(\frac{5}{6})^{n-1} - 90$　n=15 取得最小值

解析：(1) 当 $n=1$ 时，$a_1=-14$；当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-5a_n+5a_{n-1}+1$，所以 $a_n - 1 = \frac{5}{6}(a_{n-1}-1)$，

又 $a_1-1=-15\neq 0$，所以数列 $\{a_n-1\}$ 是等比数列；

(2) 由(1)知：$a_n - 1 = -15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$，得 $a_n = 1 - 15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$，从而

$S_n = 75\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + n - 90$ ($n\in\mathbf{N}^*$)；

解不等式 $S_n<S_{n+1}$，得 $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} < \frac{2}{5}$，$n > \log_{\frac{5}{6}}\frac{2}{25} + 1 \approx 14.9$，当 $n\geq 15$ 时，数列 $\{S_n\}$ 单调递增；

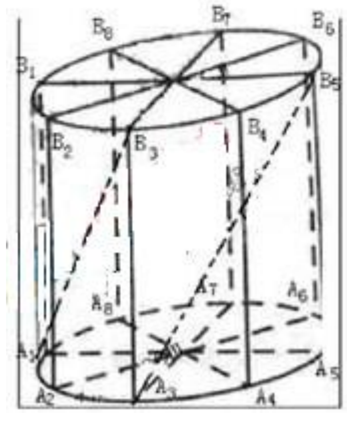
同理可得，当 $n\leq 15$ 时，数列 $\{S_n\}$ 单调递减；故当 $n=15$ 时，S_n 取得最小值.

21、（本大题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 8 分.

如图所示，为了制作一个圆柱形灯笼，先要制作 4 个全等的矩形骨架，总计耗用 9.6 米铁丝，骨架把圆柱底面 8 等份，再用 S 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面（不安装上底面）.

(1)当圆柱底面半径 r 取何值时，S 取得最大值？并求出该最大值（结果精确到 0.01 平方米）；

（2）在灯笼内，以矩形骨架的顶点为点，安装一些霓虹灯，当灯笼的底面半径为 0.3 米时，求图中两根直线 A_1B_3 与 A_3B_5 所在异面直线所成角的大小（结果用反三角函数表示）



解析：(1) 设圆柱形灯笼的母线长为 l，则 $l=1.2-2r(0<r<0.6)$，$S=-3\pi(r-0.4)^2+0.48\pi$，

所以当 $r=0.4$ 时，S 取得最大值约为 1.51 平方米；

(2) 当 $r=0.3$ 时，$l=0.6$，建立空间直角坐标系，可得 $\overrightarrow{A_1B_3} = (-0.3, 0.3, 0.6)$，

$\overrightarrow{A_3B_5} = (-0.3, -0.3, 0.6)$，

设向量$\overrightarrow{A_1B_3}$与$\overrightarrow{A_3B_5}$的夹角为θ，则$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{A_1B_3}\cdot\overrightarrow{A_3B_5}}{|\overrightarrow{A_1B_3}|\cdot|\overrightarrow{A_3B_5}|}=\dfrac{2}{3}$，

所以A_1B_3、A_3B_5所在异面直线所成角的大小为$\arccos\dfrac{2}{3}$.

22.（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 10 分。

若实数x、y、m满足$|x-m|>|y-m|$，则称x比y远离m.

（1）若x^2-1比 1 远离 0，求x的取值范围；

（2）对任意两个不相等的正数a、b，证明：a^3+b^3比a^2b+ab^2远离$2ab\sqrt{ab}$；

（3）已知函数$f(x)$的定义域D=｛$x|x\neq\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$，k∈Z，x∈R｝. 任取$x\in D$，$f(x)$等于$\sin x$和$\cos x$中远离 0 的那个值. 写出函数$f(x)$的解析式，并指出它的基本性质（结论不要求证明）.

解析：(1) $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2}.+\infty)$；

(2) 对任意两个不相等的正数a、b，有$a^3+b^3>2ab\sqrt{ab}$，$a^2b+ab^2>2ab\sqrt{ab}$，

因为$|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|-|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|=(a+b)(a-b)^2>0$，

所以$|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|>|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|$，即$a^3+b^3$比$a^2b+ab^2$远离$2ab\sqrt{ab}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & x\in(k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{3\pi}{4})\\ |\cos x|, & x\in(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4})\end{cases}$，

性质：1°$f(x)$是偶函数，图像关于y轴对称，2°$f(x)$是周期函数，最小正周期$T=\dfrac{\pi}{2}$，

3°函数$f(x)$在区间$(\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{k\pi}{2}]$单调递增，在区间$[\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4})$单调递减，$k\in\mathbf{Z}$，

4°函数$f(x)$的值域为$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1]$.

23（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 9 分.

已知椭圆Γ的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 P 的坐标为（-a，b）.

（1）若直角坐标平面上的点 M、A(0,-b)，B(a，0)满足$\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$,求点$M$的坐标；

（2）设直线$l_1:y=k_1x+p$交椭圆Γ于C、D两点，交直线$l_2:y=k_2x$于点E. 若

$k_1 \cdot k_2 = -\dfrac{b^2}{a^2}$，证明：$E$ 为 CD 的中点；

（3）对于椭圆Γ上的点 Q（a cosθ ，b sinθ ）（0＜θ ＜π ），如果椭圆Γ上存在不同的两个交点 P_1、P_2 满足 $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$,写出求作点 P_1、P_2 的步骤，并求出使 P_1、P_2 存在的θ的取值范围.

解析：(1) $M(\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2})$；

(2) 由方程组 $\begin{cases} y=k_1x+p \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$，消 y 得方程 $(a^2k_1^2+b^2)x^2+2a^2k_1px+a^2(p^2-b^2)=0$，

因为直线 $l_1: y=k_1x+p$ 交椭圆Γ于 C、D 两点，

所以Δ>0，即 $a^2k_1^2+b^2-p^2>0$，

设 $C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，CD 中点坐标为 (x_0,y_0)，

则 $\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{a^2k_1p}{a^2k_1^2+b^2} \\ y_0=k_1x_0+p=\dfrac{b^2p}{a^2k_1^2+b^2} \end{cases}$，

由方程组 $\begin{cases} y=k_1x+p \\ y=k_2x \end{cases}$，消 y 得方程 $(k_2-k_1)x=p$，

又因为 $k_2=-\dfrac{b^2}{a^2k_1}$，所以 $\begin{cases} x=\dfrac{p}{k_2-k_1}=-\dfrac{a^2k_1p}{a^2k_1^2+b^2}=x_0 \\ y=k_2x=\dfrac{b^2p}{a^2k_1^2+b^2}=y_0 \end{cases}$，

故 E 为 CD 的中点；

(3) 求作点 P_1、P_2 的步骤：1°求出 PQ 的中点 $E(-\dfrac{a(1-\cos\theta)}{2},\dfrac{b(1+\sin\theta)}{2})$，

2°求出直线 OE 的斜率 $k_2=-\dfrac{b(1+\sin\theta)}{a(1-\cos\theta)}$，

3°由 $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$ 知 E 为 CD 的中点，根据(2)可得 CD 的斜率 $k_1=-\dfrac{b^2}{a^2k_2}=\dfrac{b(1-\cos\theta)}{a(1+\sin\theta)}$，

4°从而得直线 CD 的方程：$y-\dfrac{b(1+\sin\theta)}{2}=\dfrac{b(1-\cos\theta)}{a(1+\sin\theta)}(x+\dfrac{a(1-\cos\theta)}{2})$，

5°将直线 CD 与椭圆Γ的方程联立，方程组的解即为点 P_1、P_2 的坐标.

欲使 P_1、P_2 存在，必须点 E 在椭圆内，

所以$\frac{(1-\cos\theta)^2}{4}+\frac{(1+\sin\theta)^2}{4}<1$，化简得$\sin\theta-\cos\theta<\frac{1}{2}$， $\sin(\theta-\frac{\pi}{4})<\frac{\sqrt{2}}{4}$，

又 0<θ<π，即$-\frac{\pi}{4}<\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，所以$-\frac{\pi}{4}<\theta-\frac{\pi}{4}<\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$，

故θ 的取值范围是$(0,\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4})$.