

绝密★启封前

2015 年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

数学 (理工类)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试用时 120 分钟。
考试结束后,第 I 卷 1 至 3 页,第 II 卷 4 至 6 页。

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时,考生务必将答案涂写在答题卡上,答在试卷上无效。考试结束后,将本市卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利!

第 I 卷

注意事项:

1. 每小题选出答案后,用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
2. 本卷共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。

参考公式:

- 如果事件 A, B 互斥,那么
- 如果事件 A, B 相互独立,那么

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

- 柱体的体积公式 $V = Sh$,
- 锥体的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示柱体的地面面积, 其中 S 表示锥体的地面面积

H 表示柱体的高 .

h 表示锥体的高.

一、选择题: 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

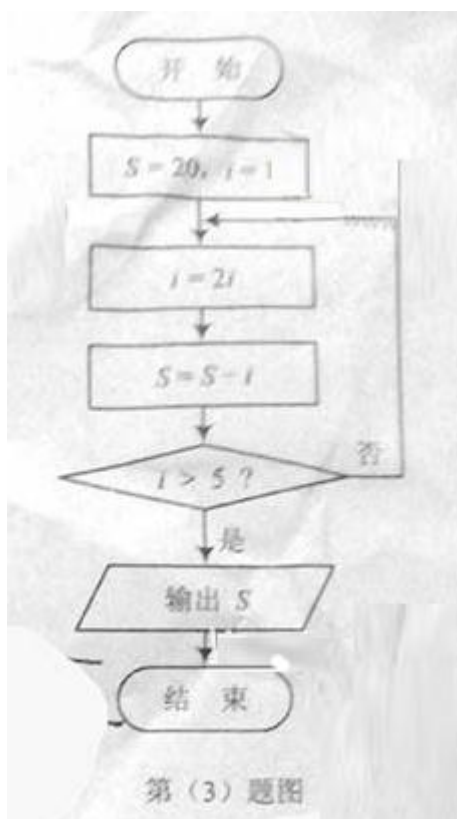
(1) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 集合 $A = \{2, 3, 5, 6\}$, 集合 $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$, 则集合 $A \cap C_U B =$

- (A) $\{2, 5\}$ (B) $\{3, 6\}$ (C) $\{2, 5, 6\}$ (D) $\{2, 3, 5, 6, 8\}$

(2) 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ x - y + 3 \geq 0, \\ 2x + y - 3 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $Z = x + 6y$ 的最大值为

- (A) 3 (B) 4 (C) 18 (D) 40

(3) 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，则输出 S 的值为



- (A) -10 (B) 6 (C) 14 (D) 18

(4) 设 $x \in \mathbb{R}$ ，则 “ $|x-2| < 1$ ” 是 “ $x^2+x-2 > 0$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件
 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充要条件
 (D) 既不充分也不必要条件

(5) 如图，在圆 O 中，M、N 是弦 AB 的三等分点，弦 CD，CE 分别经过点 M，N，若 $CM=2, MD=4, CN=3$ ，则线段 NE 的长为

- (A) $\frac{8}{3}$ (B) 3 (C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{5}{2}$



(6) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线过点 $(2, \sqrt{3})$, 且双曲线的一个焦点在抛物线 $y^2 = 4\sqrt{7}x$ 的准线上, 则双曲线的方程为

- (A) $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{28} = 1$ (B) $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{21} = 1$
 (C) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ (D) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

(7) 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x) = 2^{|1-m|} - 1$ (m 为实数) 为偶函数, 记 $a = f(\log_{0.5} 3)$, $b = f(\log_2 5)$, $c = f(2m)$, 则 a, b, c 的大小关系为

- (A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $c < a < b$ (D) $c < b < a$

(8) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2 \\ (x - 2)^2, & x > 2 \end{cases}$ 函数 $g(x) = b - f(2 - x)$, 其中 $b \in \mathbb{R}$, 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 恰有 4 个零点, 则 b 的取值范围是

- (A) $(\frac{7}{4}, +\infty)$ (B) $(-\infty, \frac{7}{4})$
 (C) $(0, \frac{7}{4})$ (D) $(\frac{7}{4}, 2)$

第 II 卷

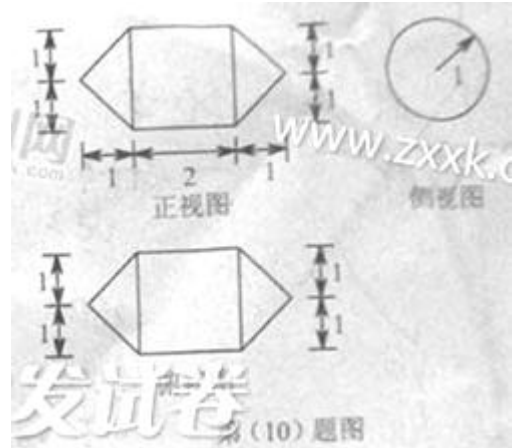
注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。
2. 本卷共 12 小题, 共 110 分。

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) i 是虚数单位，若复数 $(1-2i)(a+i)$ 是纯虚数，则实数 a 的值为。

(10) 一个几何体的三视图如图所示（单位：m），则该几何体的体积为 m^3 。



(11) 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围成的封闭图形的面积为。

(12) 在 $(x - \frac{1}{4x})^6$ 的展开式中， x^2 的系数为

(13) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}$, $b-c=2$, $\cos A = -\frac{1}{4}$, 则 a 的值为

(14) 在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel DC$, $AB=2$, $BC=1$, $\angle ABC=60^\circ$. 动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{9\lambda} \overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为

三、简答题：本大题共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(15) (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \sin^2 x - \sin^2(x - \frac{\pi}{6})$, $x \in \mathbb{R}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 内的最大值和最小值。

(16) (本小题满分 13 分)

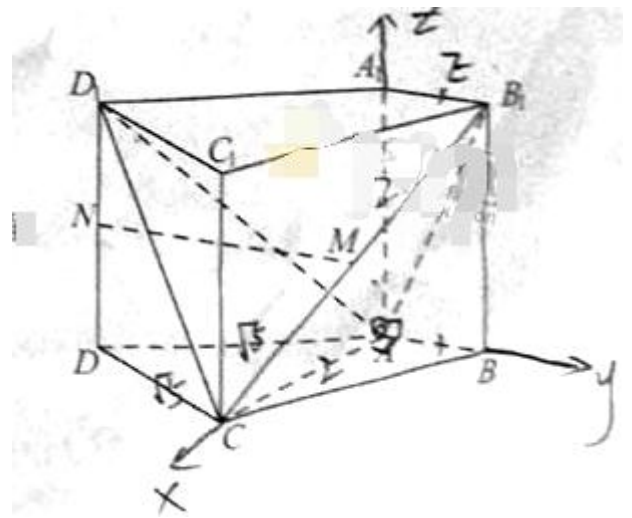
为推动乒乓球运动的发展,某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加,现有来自甲协会的运动员 3 名,其中种子选手 2 名,乙协会的运动员 5 名,其中种子选手 3 名,从这 8 名运动员中随机选择 4 人参加比赛。

(I) 设 A 为事件“选出的 4 人中恰有 2 名种子选手,且这 2 名种子选手来自同一个协会”,求该情况发生的概率;

(II) 设 X 为选出的 4 人中种子选手的人数,求随机变量 X 的分布列和数学期望。

(17) (本小题满分 13 分)

如图,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \perp AC$, $AB=1$, $AC=AA_1=2$, $AD=CD=\sqrt{5}$,且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点。



(I) 求证: $MN \parallel$ 平面 $ABCD$

(II) 求二面角 D_1-AC-B_1 的正弦值;

(III) 设 E 为棱 A_1B_1 上的点,若直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$,求线段 A_1E 的长

(18) (本小题满分 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = qa_n$ (q 为实数, 且 $q \neq 1$), $n \in N^*$, $a_1 = 1, a_2 = 2$ 且 $a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5$ 成等差数列

(I) 求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$, $n \in N^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。

19. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $\sqrt{2}$ 的左焦点为 $F(-c, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 点 M 在椭圆上且位于第一象限, 直线 FM 被圆 $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$ 截得的线段的长为 c , $|FM| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(I) 求直线 FM 的斜率;

(II) 求椭圆的方程;

(III) 设动点 P 在椭圆上, 若直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$, 求直线 OP (O 为原点) 的斜率的取值范围。

(20) (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = nx - x^n, x \in R$, 其中 $n \in N^+$, 且 $n \geq 2$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴的焦点为 P , 曲线在点 P 处的切线方程为 $y = g(x)$, 求证: 对于任意的正实数 x , 都有 $f(x) \leq g(x)$;

(III) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ (a 为实数) 有两个正实数根 x_1, x_2 , 求

证: $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$