

绝密★启封并使用完毕前

试题类型：A

2015 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 3 页，第 II 卷 3 至 5 页。
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试题相应的位置。
3. 全部答案在答题卡上完成，答在本试题上无效。
4. 考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。

第 I 卷

一. 选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 设复数 z 满足 $\frac{1+z}{1-z} = i$ ，则 $|z| =$

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

(2) $\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ =$

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

(3) 设命题 P: $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$ ，则 $\neg P$ 为

- (A) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$ (B) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$
 (C) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$ (D) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 2^n$

(4) 投篮测试中，每人投 3 次，至少投中 2 次才能通过测试。已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学通过测试的概率为

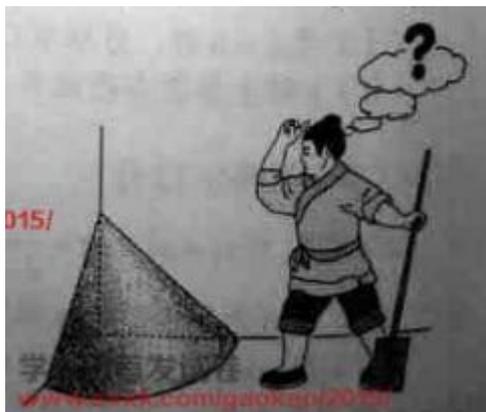
- (A) 0.648 (B) 0.432 (C) 0.36 (D) 0.312

(5) 已知 $M(x_0, y_0)$ 是双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上的一点， F_1, F_2 是 C 上的

两个焦点，若 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} < 0$ ，则 y_0 的取值范围是

- (A) $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ (B) $(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6})$
 (C) $(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ (D) $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

(6) 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题：“今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺。问：积及为米几何？”其意思为：“在屋内墙角处堆放米(如图，米堆为一个圆锥的四分之一)，米堆为一个圆锥的四分之一，米堆底部的弧度为8尺，米堆的高为5尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？”已知1斛米的体积约为1.62立方尺，圆周率约为3，估算出堆放斛的米约有



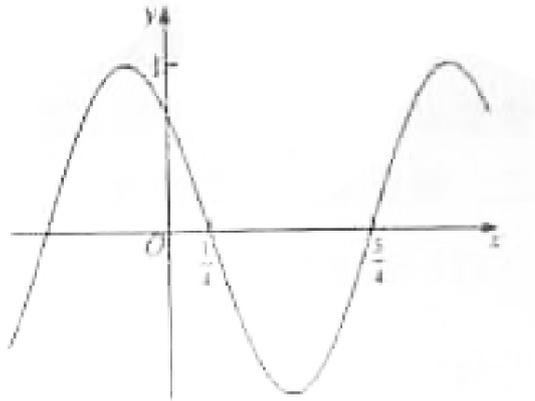
- A. 14 斛 B. 22 斛 C. 36 斛 D. 66 斛

(7) 设 D 为 ΔABC 所在平面内一点 $\vec{BC} = 3\vec{CD}$ ，则

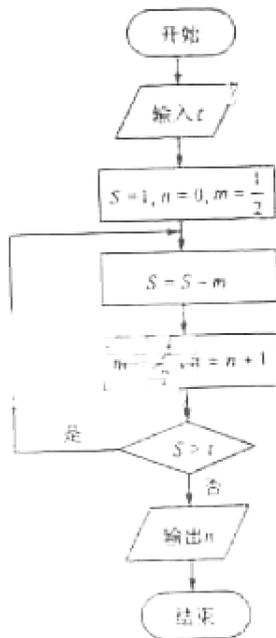
- (A) $\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC}$ (B) $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC}$
 (C) $\vec{AD} = \frac{4}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ (D) $\vec{AD} = \frac{4}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$

(8) 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为

- (A) $(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbf{Z}$ (b) $(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbf{Z}$
 (C) $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbf{Z}$ (D) $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4})$, $k \in \mathbf{Z}$

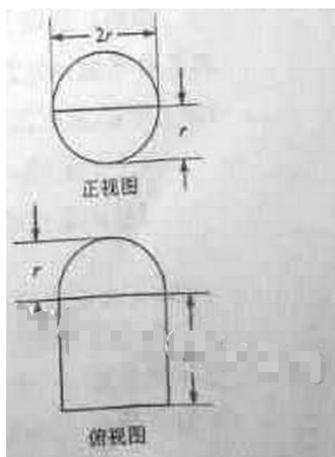


- (9) 执行右面的程序框图，如果输入的 $t=0.01$ ，则输出的 $n=$
 (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8



- (10) $(x^2 + x + y)^5$ 的展开式中， x^5y^2 的系数为
 (A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 60

(11) 圆柱被一个平面截去一部分后与半球(半径为 r)组成一个几何体，该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示。若该几何体的表面积为 $16 + 20\pi$ ，则 $r=$



(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

12. 设函数 $f(x) = e^x(2x-1) - ax + a$, 其中 $a < 1$, 若存在唯一的整数 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $[-\frac{3}{2e}, 1)$ B. $[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$ C. $[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$ D. $[\frac{3}{2e}, 1)$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 (13) 题~第 (21) 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 (22) 题~第 (24) 题为选考题, 考生根据要求作答。

二、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分

(13) 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 为偶函数, 则 $a =$ _____

(14) 一个圆经过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的三个顶点, 且圆心在 x 轴上, 则该圆的标准方程为_____。

(15) 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x - y \leq 0, \\ x + y - 4 \leq 0, \end{cases}$ 则 $\frac{x}{y}$ 的最大值为_____。

(16) 在平面四边形 ABCD 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$, $BC = 2$, 则 AB 的取值范围是

三. 解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $a_n > 0$, $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$

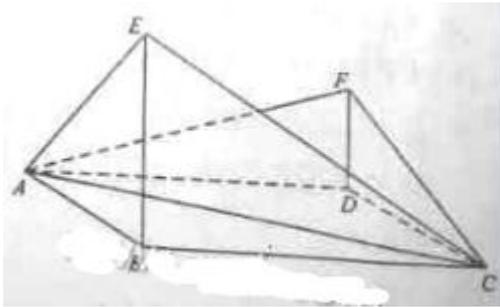
(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式:

(II) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

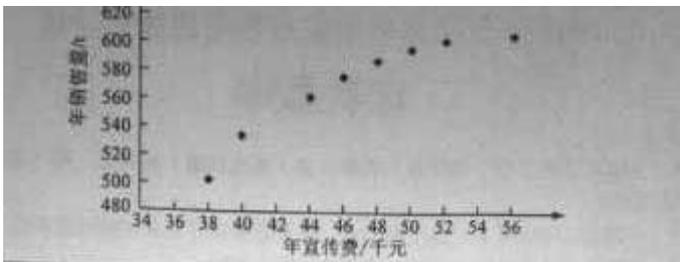
(18) 如图, 四边形 ABCD 为菱形, $\angle ABC = 120^\circ$, E, F 是平面 ABCD 同一侧的两点, $BE \perp$ 平面 ABCD, $DF \perp$ 平面 ABCD, $BE = 2DF$, $AE \perp EC$.

(1) 证明: 平面 AEC \perp 平面 AFC

(2) 求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值



(19) 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响, 对近 8 年的年宣传费 x_1 和年销售量 y_1 ($i=1, 2, \dots, 8$) 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值。



| \bar{x} | \bar{y} | \bar{w} | $\sum_{x+1}^1 (x_1 - \bar{x})^2$ | $\sum_{x+1}^1 (w_1 - \bar{w})^2$ | $\sum_{x+1}^1 (x_1 - \bar{x})(y - \bar{y})$ | $\sum_{x+1}^1 (w_1 - \bar{w})(y - \bar{y})$ |
|-----------|-----------|-----------|----------------------------------|----------------------------------|---|---|
| 46.6 | 56.3 | 6.8 | 289.8 | 1.6 | 1469 | 108.8 |

表中 $w_1 = \sqrt{x_1}$, $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{x+1}^1 w_1$

(I) 根据散点图判断, $y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(II) 根据 (I) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(III) 以知这种产品的年利率 z 与 x 、 y 的关系为 $z=0.2y-x$ 。根据 (II) 的结果回答下列问题:

- (i) 年宣传费 $x=49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?
- (ii) 年宣传费 x 为何值时, 年利率的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \dots (u_n, v_n)$, 其回归线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为:

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^u (x_i - u)(y_i - u)}{\sum_{i=1}^u (u_i - u)^2}$$

(20) (本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 与直线 $y = kx + a$ ($a > 0$) 交于 M, N 两点,

- (I) 当 $k=0$ 时, 分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;
 (II) y 轴上是否存在点 P , 使得当 k 变动时, 总有 $\angle OPM = \angle OPN$? 说明理由。

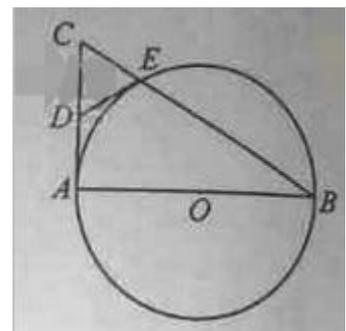
(21) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}, g(x) = -\ln x$

- (I) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线;
 (II) 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\} (x > 0)$, 讨论 $h(x)$ 零点的个数

请考生在 (22)、(23)、(24) 三题中任选一题作答。注意: 只能做所选定的题目。如果多做, 则按所做第一个题目计分, 作答时, 请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑。

(22) (本题满分 10 分) 选修 4-1: 几何证明选讲
 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, BC 交 $\odot O$ 于 E



- (I) 若 D 为 AC 的中点, 证明: DE 是 $\odot O$ 的切线;
 (II) 若 $OA = \sqrt{3} CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.

(23) (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中。直线 $C_1: x = -2$, 圆 $C_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系。

(I) 求 C_1, C_2 的极坐标方程;

(II) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4} (\rho \in \mathbb{R})$, 设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N , 求 $\triangle C_2MN$ 的面积

(24) (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| - 2|x-a|$, $a > 0$.

(I) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;

(II) 若 $f(x)$ 的图像与 x 轴围成的三角形面积大于 6, 求 a 的取值范围