

江苏数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, 则集合 $A \cup B$ 中元素的个数为_____.
2. 已知一组数据 4, 6, 5, 8, 7, 6, 那么这组数据的平均数为_____.
3. 设复数 z 满足 $z^2 = 3 + 4i$ (i 是虚数单位), 则 z 的模为_____.
4. 根据如图所示的伪代码, 可知输出的结果 S 为_____.

```

S ← 1
I ← 1
While I < 8
    S ← S + 2
    I ← I + 3
End While
Print S
    
```

(第 4 题)

5. 袋中有形状、大小都相同的 4 只球, 其中 1 只白球, 1 只红球, 2 只黄球, 从中一次随机摸出 2 只球, 则这 2 只球颜色不同的概率为_____.
6. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 若 $m\vec{a} + n\vec{b} = (9, -8)$ ($m, n \in R$), 则 $m - n$ 的值为_____.
7. 不等式 $2^{x^2 - x} < 4$ 的解集为_____.
8. 已知 $\tan \alpha = -2$, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{7}$, 则 $\tan \beta$ 的值为_____.
9. 现有橡皮泥制作的底面半径为 5, 高为 4 的圆锥和底面半径为 2、高为 8 的圆柱各一个. 若将它们重新制作成总体积与高均保持不变, 但底面半径相同的新的圆锥与圆柱各一个, 则新的底面半径为_____.
10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 以点 $(1, 0)$ 为圆心且与直线 $mx - y - 2m - 1 = 0$ ($m \in R$) 相切的所有圆中, 半径最大的圆的标准方程为_____.
11. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} - a_n = n + 1$ ($n \in N^*$), 则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 10 项和为_____.
12. 在平面直角坐标系 xOy 中, P 为双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 右支上的一个动点. 若点 P 到直线 $x - y + 1 = 0$ 的距离对 c 恒成立, 则是实数 c 的最大值为_____.
13. 已知函数 $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1 \end{cases}$, 则方程 $|f(x) + g(x)| = 1$ 实根的个数为_____.
14. 设向量 $a_k = (\cos \frac{k\pi}{6}, \sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6})$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 12$), 则 $\sum_{k=0}^{12} (a_k \cdot a_{k+1})$ 的值为_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 2, AC = 3, A = 60^\circ$.

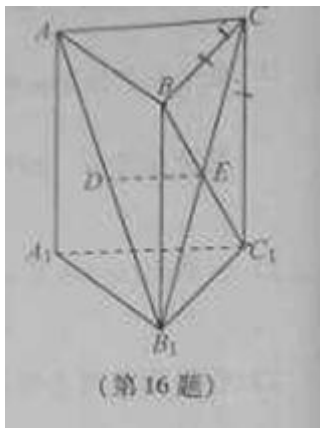
- (1) 求 BC 的长;
- (2) 求 $\sin 2C$ 的值.

16. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AC \perp BC, B \in \text{平面 } A_1C_1$. 设 AB_1 的中点为 D ,

$$B_1C \cap BC_1 = E.$$

求证: (1) $DE \parallel$ 平面 AA_1CC_1

(2) $BC_1 \perp AB_1$



17. (本小题满分 14 分)

某山区外围有两条相互垂直的直线型公路, 为进一步改善山区的交通现状, 计划修建一条连接两条公路的山区边界的直线型公路, 记两条相互垂直的公路为 l_1, l_2 , 山区边界曲线为 C , 计划修建的公路为 l , 如图所示, M, N 为 C 的两个端点, 测得点 M 到 l_1, l_2 的距离分别为 5 千米和 40 千米, 点 N 到 l_1, l_2 的距离分别为 20 千米和 2.5 千米, 以 l_1, l_2 所在的直线分别为 x, y 轴, 建立平面直角坐标系 xOy , 假

设曲线 C 符合函数 $y = \frac{a}{x^2 + b}$ (其中 a, b 为常数) 模型.

(I) 求 a, b 的值;

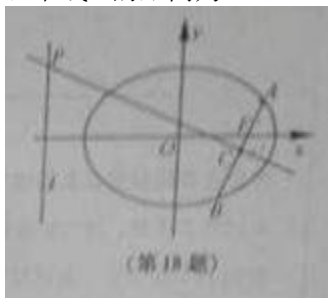
(II) 设公路 l 与曲线 C 相切于 P 点, P 的横坐标为 t .

①请写出公路 l 长度的函数解析式 $f(t)$, 并写出其定义域;

②当 t 为何值时, 公路 l 的长度最短? 求出最短长度.

18. (本小题满分 16 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且右焦点 F 到左准线 l 的距离为 3.



(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过 F 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线分别交直线 l 和 AB 于点 P, C , 若 $PC=2AB$, 求直线 AB 的方程.

19.

已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b (a, b \in \mathbb{R})$.

- (1) 试讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $b=c-a$ (实数 c 是 a 与无关的常数), 当函数 $f(x)$ 有三个不同的零点时, a 的取值范围恰好是 $(-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$, 求 c 的值.

20. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是各项为正数且公差为 $d (d \neq 0)$ 的等差数列

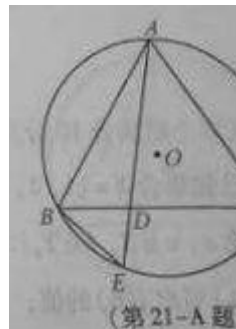
- (1) 证明: $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}$ 依次成等比数列
- (2) 是否存在 a_1, d , 使得 a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 依次成等比数列, 并说明理由
- (3) 是否存在 a_1, d 及正整数 n, k , 使得 $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+3k}, a_4^{n+5k}$ 依次成等比数列, 并说明理由

附加题

21. (选择题) 本题包括 A、B、C、D 四小题, 请选定其中两小题, 并在相应的区域内作答, 若多做, 则按作答的前两小题评分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A. [选修 4-1: 几何证明选讲] (本小题满分 10 分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\triangle ABC$ 的外接圆圆 O 的弦 AE 交 BC 于点 D
求证: $\triangle ABD \approx \triangle AEB$



B. [选修 4-2: 矩阵与变换] (本小题满分 10 分)

已知 $x, y \in R$, 向量 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ 的属性特征值 -2 的一个特征向量, 矩阵 A 以及它的另一个特征值.

C. [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

已知圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\sqrt{2}\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) - 4 = 0$, 求圆 C 的半径.

D. [选修 4-5: 不等式选讲]

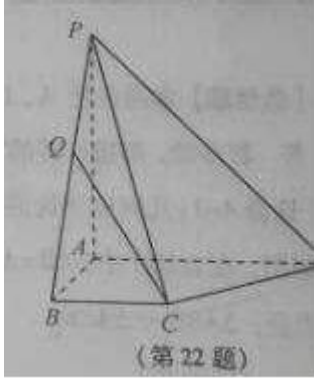
解不等式 $x + |2x + 3| \geq 3$

22.如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为直角梯形,

$$\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}, PA = AD = 2, AB = BC = 1$$

(1)求平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角的余弦值;

(2)点 Q 是线段 BP 上的动点, 当直线 CQ 与 DP 所成角最小时, 求线段 BQ 的长



23. 已知集合 $X = \{1, 2, 3\}, Y_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} (n \in \mathbb{N}^*)$, 设

$S_n = \{(a, b) \mid a \text{ 整除 } b \text{ 或 } b \text{ 整除 } a, a \in X, b \in Y_n\}$, 令 $f(n)$ 表示集合 S_n 所含元素个数.

(1) 写出 $f(6)$ 的值;

(2) 当 $n \geq 6$ 时, 写出 $f(n)$ 的表达式, 并用数学归纳法证明.