绝密★启用前

2015年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）

数　学（理工类）

本试题卷共6页，22题，其中第15、16题为选考题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1．答卷前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。用2B铅笔将答题卡上试卷类型A后的方框涂黑。

2．选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3．填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4．选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑，再在答题卡上对应的答题区域内答题。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

5．考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．i为虚数单位，i^{607}的共轭复数为

A．i　　B．$-\mathrm{i}$　　C．1　　D．-1

2．我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米1534石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得254粒内夹谷28粒，则这批米内夹谷约为

A．134石　　B．169石　　C．338石　　D．1365石

3．已知$(1+x)^n$的展开式中第4项与第8项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为

A．2^{12}　　B．2^{11}　　C．2^{10}　　D．2^{9}

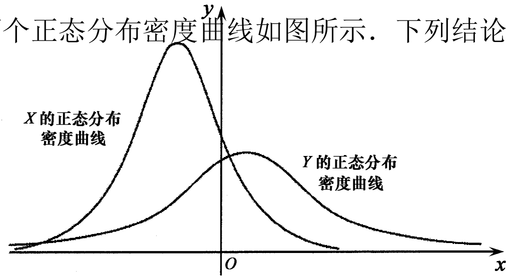
4．设 $X \sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$，这两个正态分布密度曲线如图所示．下列结论中正确的是

A．$P(Y \ge \mu_2) \ge P(Y \ge \mu_1)$

B．$P(X \le \sigma_2) \le P(X \le \sigma_1)$

C．对任意正数 t，$P(X \le t) \ge P(Y \le t)$

D．对任意正数 t，$P(X \ge t) \ge P(Y \ge t)$



第 4 题图

5．设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$，$n \ge 3$．若 p：$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 成等比数列；

q：$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)^2$，则

A．p 是 q 的充分条件，但不是 q 的必要条件

B．p 是 q 的必要条件，但不是 q 的充分条件

C．p 是 q 的充分必要条件

D．p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件

6．已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$g(x) = f(x) - f(ax)\ (a > 1)$，则

A．$\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn} x$　　B．$\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn} x$

C．$\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}[f(x)]$　　D．$\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn}[f(x)]$

7．在区间 $[0,\ 1]$ 上随机取两个数 x, y，记 p_1 为事件“$x + y \ge \frac{1}{2}$”的概率，p_2 为事件“$|x - y| \le \frac{1}{2}$”的概率，p_3 为事件“$xy \le \frac{1}{2}$”的概率，则

A．$p_1 < p_2 < p_3$　　B．$p_2 < p_3 < p_1$

C．$p_3 < p_1 < p_2$　　D．$p_3 < p_2 < p_1$

8．将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 $b\ (a \ne b)$ 同时增加 $m\ (m > 0)$ 个单位长度，得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2，则

A．对任意的 $a,\ b$，$e_1 > e_2$　　B．当 $a > b$ 时，$e_1 > e_2$；当 $a < b$ 时，$e_1 < e_2$

C．对任意的 $a,\ b$，$e_1 < e_2$　　D．当 $a > b$ 时，$e_1 < e_2$；当 $a < b$ 时，$e_1 > e_2$

9．已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x, y \in \mathbf{Z}\}$，$B = \{(x, y) \mid |x| \le 2,\ |y| \le 2,\ x, y \in \mathbf{Z}\}$，定义集合 $A \oplus B = \{(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \mid (x_1,\ y_1) \in A,\ (x_2,\ y_2) \in B\}$，则 $A \oplus B$ 中元素的个数为

A．77　　B．49　　C．45　　D．30

10．设 $x \in \mathbf{R}$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．若存在实数 t，使得 $[t] = 1$，$[t^2] = 2$，…，$[t^n] = n$ 同时成立，则正整数 n 的最大值是

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

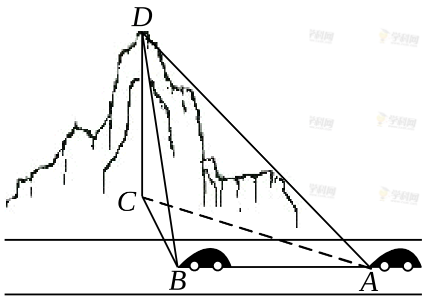
二、填空题：本大题共 6 小题，考生需作答 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．请将答案填在答题卡对应题号的位置上．答错位置，书写不清，模棱两可均不得分．

（一）必考题（11—14 题）

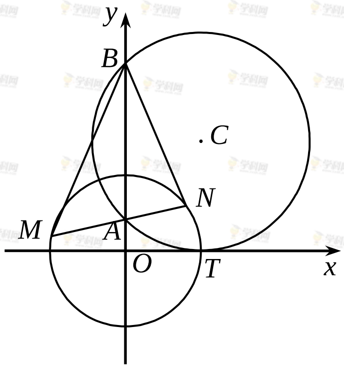
11．已知向量 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，$|\overrightarrow{OA}|=3$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$__________．

12．函数 $f(x)=4\cos^2\frac{x}{2}\cos(\frac{\pi}{2}-x)-2\sin x-|\ln(x+1)|$ 的零点个数为__________．

13．如图，一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶，到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上，行驶 600m 后到达 B 处，测得此山顶在西偏北 75° 的方向上，仰角为 30°，则此山的高度 $CD=$__________m.



第 13 题图



第 14 题图

14．如图，圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1,0)$，与 y 轴正半轴交于两点 A,B（B 在 A 的上方），且 $|AB|=2$．

（Ⅰ）圆 C 的标准方程为__________；

（Ⅱ）过点 A 任作一条直线与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相交于 M,N 两点，下列三个结论：

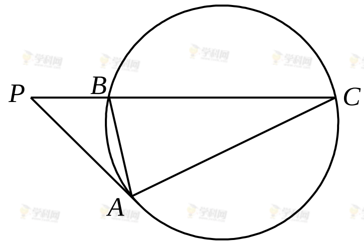
① $\frac{|NA|}{|NB|}=\frac{|MA|}{|MB|}$；　② $\frac{|NB|}{|NA|}-\frac{|MA|}{|MB|}=2$；　③ $\frac{|NB|}{|NA|}+\frac{|MA|}{|MB|}=2\sqrt{2}$．

其中正确结论的序号是__________．（写出所有正确结论的序号）

（二）选考题（请考生在第 15、16 两题中任选一题作答，请先在答题卡指定位置将你所选的题目序号后的方框用 2B 铅笔涂黑．如果全选，则按第 15 题作答结果计分.）

15．（选修 4-1：几何证明选讲）

如图，PA 是圆的切线，A 为切点，PBC 是圆的割线，且 $BC=3PB$，则 $\frac{AB}{AC}=$_______．



第 15 题图

16．（选修 4-4：坐标系与参数方程）

在直角坐标系 xOy 中，以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．已知直线 l 的极坐标方

程为$\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=0$，曲线$C$的参数方程为$\begin{cases}x=t-\dfrac{1}{t},\\ y=t+\dfrac{1}{t}\end{cases}$（$t$为参数），$l$与$C$相交于$A,B$两点，则$|AB|=$________.

三、解答题：本大题共6小题，共75分． 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分11分）

某同学用“五点法”画函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
x		$\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5		-5	0

（Ⅰ）请将上表数据补充完整，填写在答题卡上相应位置，并直接写出函数$f(x)$的解析式；

（Ⅱ）将$y=f(x)$图象上所有点向左平行移动θ $(\theta>0)$个单位长度，得到$y=g(x)$的图象．若$y=g(x)$图象的一个对称中心为$(\dfrac{5\pi}{12},0)$，求θ的最小值．

18．（本小题满分 12 分）

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，前n项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的公比为q. 已知$b_1=a_1$，$b_2=2$，$q=d$，$S_{10}=100$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）当$d>1$时，记$c_n=\frac{a_n}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

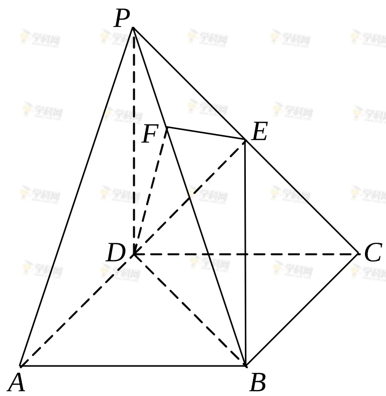
19．（本小题满分 12 分）

《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.

如图，在阳马$P-ABCD$中，侧棱$PD\perp$底面$ABCD$，且$PD=CD$，过棱PC的中点E，作$EF\perp PB$交PB于点F，连接DE, DF, BD, BE.

（Ⅰ）证明：$PB\perp$平面DEF. 试判断四面体$DBEF$是否为鳖臑，若是，写出其每个面的直角（只需写出结论）；若不是，说明理由；

（Ⅱ）若面DEF与面$ABCD$所成二面角的大小为$\frac{\pi}{3}$，求$\frac{DC}{BC}$的值.



第 19 题图

20．（本小题满分 12 分）

某厂用鲜牛奶在某台设备上生产A, B两种奶制品．生产 1 吨A产品需鲜牛奶 2 吨，使用设备 1 小时，获利 1000 元；生产 1 吨B产品需鲜牛奶 1.5 吨，使用设备 1.5 小时，获利 1200 元．要求每天B产品的产量不超过A产品产量的 2 倍，设备每天生产A, B两种产品时间之和不超过 12 小时. 假定每天可获取的鲜牛奶数量W（单位：吨）是一个随机变量，其分布列为

W	12	15	18
P	0.3	0.5	0.2

该厂每天根据获取的鲜牛奶数量安排生产，使其获利最大，因此每天的最大获利Z（单位：元）是一个随机变量.

（Ⅰ）求Z的分布列和均值；

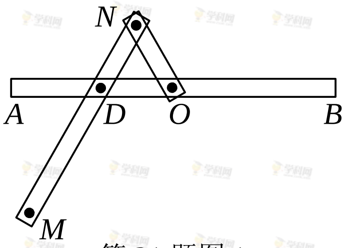
（Ⅱ）若每天可获取的鲜牛奶数量相互独立，求 3 天中至少有 1 天的最大获利超过 10000 元的概率.

21．（本小题满分 14 分）

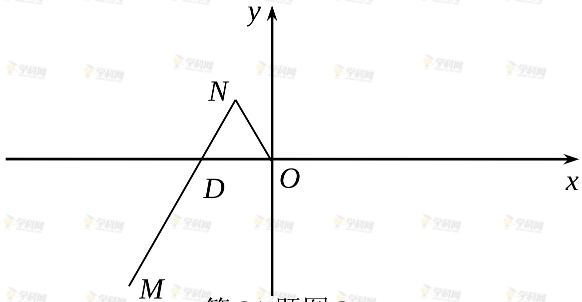
一种作图工具如图 1 所示．O是滑槽AB的中点，短杆ON可绕O转动，长杆MN通过N处铰链与ON连接，MN上的栓子D可沿滑槽AB滑动，且$DN=ON=1$，$MN=3$．当栓子D在滑槽AB内作往复运动时，带动N绕O转动一周（D不动时，N也不动），M处的笔尖画出的曲线记为C. 以O为原点，AB所在的直线为x轴建立如图 2 所示的平面直角坐标系.

（Ⅰ）求曲线 C 的方程；

（Ⅱ）设动直线 l 与两定直线 $l_1: x-2y=0$ 和 $l_2: x+2y=0$ 分别交于 P, Q 两点．若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点，试探究：△OPQ 的面积是否存在最小值？若存在，求出该最小值；若不存在，说明理由．



第 21 题图 1



第 21 题图 2

22．（本小题满分 14 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，$b_n = n(1+\frac{1}{n})^n a_n \quad (n \in \mathbf{N}_+)$，e 为自然对数的底数．

（Ⅰ）求函数 $f(x)=1+x-\mathrm{e}^x$ 的单调区间，并比较 $(1+\frac{1}{n})^n$ 与 e 的大小；

（Ⅱ）计算 $\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_1b_2}{a_1a_2}$，$\frac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}$，由此推测计算 $\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}$ 的公式，并给出证明；

（Ⅲ）令 $c_n=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$，数列 $\{a_n\}$，$\{c_n\}$ 的前 n 项和分别记为 S_n, T_n，证明：$T_n < \mathrm{e}S_n$．

绝密★启用前

2015 年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）

数学（理工类）试题参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1．A　2．B　3．D　4．C　5．A　6．B　7．B　8．D　9．C　10．B

二、填空题（本大题共 6 小题，考生需作答 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11．9　　12．2　　13．$100\sqrt{6}$

14．（Ⅰ）$(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=2$；（Ⅱ）①②③　　15．$\frac{1}{2}$　　16．$2\sqrt{5}$

三、解答题（本大题共 6 小题，共 75 分）

17．（11 分）

（Ⅰ）根据表中已知数据，解得 $A=5,\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 数据补全如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13}{12}\pi$
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5	0	-5	0

且函数表达式为 $f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，得 $g(x)=5\sin(2x+2\theta-\frac{\pi}{6})$.

因为 $y=\sin x$ 的对称中心为 $(k\pi,0)$，$k\in\mathbf{Z}$.

令 $2x+2\theta-\frac{\pi}{6}=k\pi$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta$，$k\in\mathbf{Z}$．

由于函数 $y=g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 成中心对称，令 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta=\frac{5\pi}{12}$，

解得 $\theta=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. 由 $\theta>0$ 可知，当 $k=1$ 时，θ 取得最小值 $\frac{\pi}{6}$.

18．（12 分）

（Ⅰ）由题意有，$\begin{cases}10a_1+45d=100,\\ a_1d=2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a_1+9d=20,\\ a_1d=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=9,\\ d=\frac{2}{9}.\end{cases}$ 故 $\begin{cases}a_n=2n-1,\\ b_n=2^{n-1}.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_n=\frac{1}{9}(2n+79),\\ b_n=9\cdot(\frac{2}{9})^{n-1}.\end{cases}$

（Ⅱ）由 $d>1$，知 $a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$，故 $c_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，于是

$T_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{9}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$， ①

$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \frac{9}{2^5} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$. ②

①-②可得

$\frac{1}{2}T_n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$，

故 $T_n = 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

19.（12 分）

（解法 1）

（Ⅰ）因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PD \perp BC$，

由底面 $ABCD$ 为长方形，有 $BC \perp CD$，而 $PD \cap CD = D$，

所以 $BC \perp$ 平面PCD. 而 $DE \subset$ 平面PCD，所以 $BC \perp DE$.

又因为 $PD = CD$，点 E 是 PC 的中点，所以 $DE \perp PC$.

而 $PC \cap BC = C$，所以 $DE \perp$ 平面 PBC. 而 $PB \subset$ 平面PBC，所以 $PB \perp DE$.

又 $PB \perp EF$， $DE \cap EF = E$，所以 $PB \perp$ 平面 DEF.

由 $DE \perp$ 平面 PBC， $PB \perp$ 平面 DEF，可知四面体 $BDEF$ 的四个面都是直角三角形，

即四面体 $BDEF$ 是一个鳖臑，其四个面的直角分别为 $\angle DEB, \angle DEF, \angle EFB, \angle DFB$.

（Ⅱ）如图 1，在面 PBC 内，延长 BC 与 FE 交于点 G，则 DG 是平面 DEF 与平面 $ABCD$ 的交线. 由（Ⅰ）知， $PB \perp$ 平面DEF，所以 $PB \perp DG$.

又因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PD \perp DG$. 而 $PD \cap PB = P$，所以 $DG \perp$ 平面PBD.

故 $\angle BDF$ 是面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的平面角，

设 $PD = DC = 1$， $BC = \lambda$，有 $BD = \sqrt{1+\lambda^2}$，

在 Rt$\triangle PDB$ 中，由 $DF \perp PB$，得 $\angle DPF = \angle FDB = \frac{\pi}{3}$，

则 $\tan\frac{\pi}{3} = \tan\angle DPF = \frac{BD}{PD} = \sqrt{1+\lambda^2} = \sqrt{3}$，解得 $\lambda = \sqrt{2}$.

所以 $\frac{DC}{BC} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故当面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$ 时， $\frac{DC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

（解法 2）

（Ⅰ）如图 2，以 D 为原点，射线 DA, DC, DP 分别为 x, y, z 轴的正半轴，建立空间直角坐标系．设

$PD=DC=1$，$BC=\lambda$，则 $D(0,0,0)$, $P(0,0,1)$, $B(\lambda,1,0)$, $C(0,1,0)$，$\overrightarrow{PB}=(\lambda,1,-1)$，点 E 是 PC 的中点，所以 $E(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{DE}=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

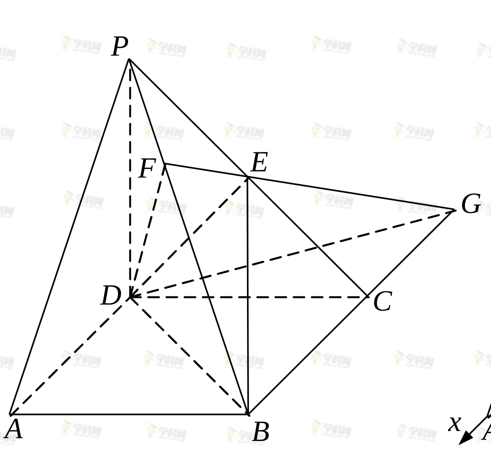
于是 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，即 $PB\perp DE$．

又已知 $EF\perp PB$，而 $DE\cap EF=E$，所以 $PB\perp$ 平面DEF．

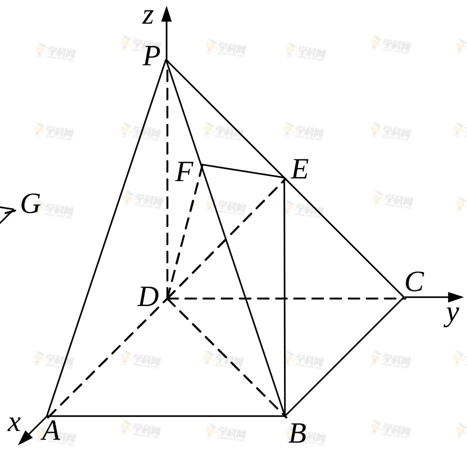
因 $\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，则 $DE\perp PC$，所以 $DE\perp$ 平面PBC．

由 $DE\perp$ 平面 PBC，$PB\perp$ 平面 DEF，可知四面体 $BDEF$ 的四个面都是直角三角形，

即四面体 $BDEF$ 是一个鳖臑，其四个面的直角分别为 $\angle DEB, \angle DEF, \angle EFB, \angle DFB$．



第 19 题解答图 1



第 19 题解答图 2

（Ⅱ）由 $PD\perp$ 平面$ABCD$，所以 $\overrightarrow{DP}=(0,0,1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量；

由（Ⅰ）知，$PB\perp$ 平面DEF，所以 $\overrightarrow{BP}=(-\lambda,-1,1)$ 是平面 DEF 的一个法向量.

若面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，

则 $\cos\frac{\pi}{3}=\left|\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\overrightarrow{DP}|}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+2}}\right|=\frac{1}{2}$，

解得 $\lambda=\sqrt{2}$．所以 $\frac{DC}{BC}=\frac{1}{\lambda}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

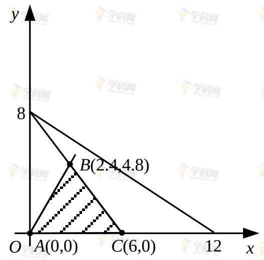
故当面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{DC}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20．（12 分）

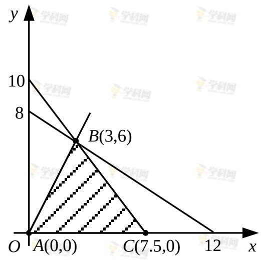
（Ⅰ）设每天 A, B 两种产品的生产数量分别为 x, y，相应的获利为 z，则有

$$\begin{cases}2x+1.5y\le W,\\ x+1.5y\le 12,\\ 2x-y\ge 0,\\ x\ge 0,\ \ y\ge 0.\end{cases}\qquad (1)$$

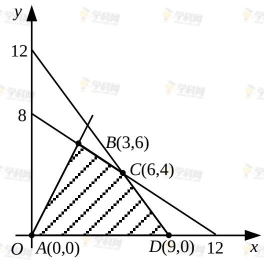
目标函数为 $z=1000x+1200y$.



第 20 题解答图 1



第 20 题解答图 2



第 20 题解答图 3

当 $W=12$ 时，（1）表示的平面区域如图 1，三个顶点分别为 $A(0,\ 0),\ B(2.4,\ 4.8),\ C(6,\ 0)$.

将 $z=1000x+1200y$ 变形为 $y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$，

当 $x=2.4,\ y=4.8$ 时，直线 l： $y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$ 在 y 轴上的截距最大，

最大获利 $Z=z_{\max}=2.4\times1000+4.8\times1200=8160$.

当 $W=15$ 时，（1）表示的平面区域如图 2，三个顶点分别为 $A(0,\ 0),\ B(3,\ 6),\ C(7.5,\ 0)$.

将 $z=1000x+1200y$ 变形为 $y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$，

当 $x=3,\ y=6$ 时，直线 l： $y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$ 在 y 轴上的截距最大，

最大获利 $Z=z_{\max}=3\times1000+6\times1200=10200$.

当 $W=18$ 时，（1）表示的平面区域如图 3，

四个顶点分别为 $A(0,\ 0),\ B(3,\ 6),\ C(6,\ 4),\ D(9,\ 0)$.

将 $z=1000x+1200y$ 变形为 $y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$，

当 $x=6, y=4$ 时，直线 l： $y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$ 在 y 轴上的截距最大，

最大获利 $Z=z_{\max}=6\times1000+4\times1200=10800$.

故最大获利 Z 的分布列为

Z	8160	10200	10800
P	0.3	0.5	0.2

因此， $E(Z)=8160\times0.3+10200\times0.5+10800\times0.2=9708.$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，一天最大获利超过 10000 元的概率 $p_1=P(Z>10000)=0.5+0.2=0.7$，

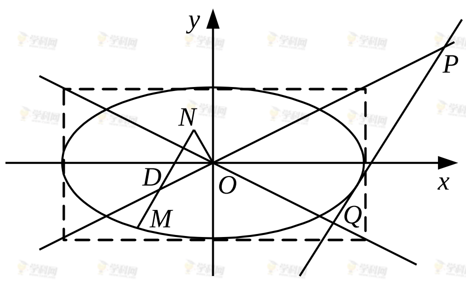
由二项分布，3 天中至少有 1 天最大获利超过 10000 元的概率为

$p=1-(1-p_1)^3=1-0.3^3=0.973.$

21.（14 分）

（Ⅰ）设点 $D(t,0)\ (|t|\le2)$， $N(x_0,y_0),\ M(x,y)$，依题意，

$\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{DN}$，且 $|\overrightarrow{DN}|=|\overrightarrow{ON}|=1$，



所以 $(t-x,-y)=2(x_0-t,\ y_0)$，且 $\begin{cases}(x_0-t)^2+y_0^2=1,\\ x_0^2+y_0^2=1.\end{cases}$

即 $\begin{cases}t-x=2x_0-2t,\\ y=-2y_0.\end{cases}$ 且 $t(t-2x_0)=0.$

由于当点 D 不动时，点 N 也不动，所以 t 不恒等于 0，

于是 $t=2x_0$，故 $x_0=\dfrac{x}{4},y_0=-\dfrac{y}{2}$，代入 $x_0^2+y_0^2=1$，可得 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$，

即所求的曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1.$

（II）（1）当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 为 $x=4$ 或 $x=-4$，都有 $S_{\Delta OPQ}=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$.

（2）当直线 l 的斜率存在时，设直线 $l:y=kx+m\ \ (k\neq\pm\dfrac{1}{2})$，

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+4y^2=16,\end{cases}$ 消去 y，可得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-16=0$.

因为直线 l 总与椭圆 C 有且只有一个公共点，

所以 $\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-16)=0$，即 $m^2=16k^2+4$. ①

又由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x-2y=0,\end{cases}$ 可得 $P(\dfrac{2m}{1-2k},\dfrac{m}{1-2k})$；同理可得 $Q(\dfrac{-2m}{1+2k},\dfrac{m}{1+2k})$.

由原点 O 到直线 PQ 的距离为 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$ 和 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_P-x_Q|$，可得

$S_{\Delta OPQ}=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot d=\dfrac{1}{2}|m||x_P-x_Q|=\dfrac{1}{2}\cdot|m|\left|\dfrac{2m}{1-2k}+\dfrac{2m}{1+2k}\right|=\left|\dfrac{2m^2}{1-4k^2}\right|$. ②

将①代入②得，$S_{\Delta OPQ}=\left|\dfrac{2m^2}{1-4k^2}\right|=8\dfrac{|4k^2+1|}{|4k^2-1|}$.

当 $k^2>\dfrac{1}{4}$ 时，$S_{\Delta OPQ}=8(\dfrac{4k^2+1}{4k^2-1})=8(1+\dfrac{2}{4k^2-1})>8$；

当 $0\le k^2<\dfrac{1}{4}$ 时，$S_{\Delta OPQ}=8(\dfrac{4k^2+1}{1-4k^2})=8(-1+\dfrac{2}{1-4k^2})$.

因 $0\le k^2<\dfrac{1}{4}$，则 $0<1-4k^2\le1$，$\dfrac{2}{1-4k^2}\ge2$，所以 $S_{\Delta OPQ}=8(-1+\dfrac{2}{1-4k^2})\ge8$，

当且仅当 $k=0$ 时取等号.

所以当 $k=0$ 时，$S_{\Delta OPQ}$ 的最小值为 8.

综合（1）（2）可知，当直线 l 与椭圆 C 在四个顶点处相切时，$\triangle OPQ$ 的面积取得最小值 8.

22．（14 分）

（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=1-e^x$.

当 $f'(x)>0$，即 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递减.

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，单调递减区间为 $(0,+\infty)$.

当 $x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$，即 $1+x<e^x$.

令 $x=\frac{1}{n}$，得 $1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}$，即 $(1+\frac{1}{n})^n<e$.　　①

（Ⅱ）$\frac{b_1}{a_1}=1\cdot(1+\frac{1}{1})^1=1+1=2$；$\frac{b_1b_2}{a_1a_2}=\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{b_2}{a_2}=2\cdot2(1+\frac{1}{2})^2=(2+1)^2=3^2$；

$\frac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}=\frac{b_1b_2}{a_1a_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}=3^2\cdot3(1+\frac{1}{3})^3=(3+1)^3=4^3$.

由此推测：$\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=(n+1)^n$.　　②

下面用数学归纳法证明②.

（1）当 $n=1$ 时，左边 $=$ 右边 $=2$，②成立.

（2）假设当 $n=k$ 时，②成立，即 $\frac{b_1b_2\cdots b_k}{a_1a_2\cdots a_k}=(k+1)^k$.

当 $n=k+1$ 时，$b_{k+1}=(k+1)(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}a_{k+1}$，由归纳假设可得

$\frac{b_1b_2\cdots b_kb_{k+1}}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}=\frac{b_1b_2\cdots b_k}{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}=(k+1)^k(k+1)(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}=(k+2)^{k+1}$.

所以当 $n=k+1$ 时，②也成立.

根据（1）（2），可知②对一切正整数 n 都成立.

（Ⅲ）由 c_n 的定义，②，算术-几何平均不等式，b_n 的定义及①得

$$T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=(a_1)^{\frac{1}{1}}+(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}+(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}}+\cdots+(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{(b_1)^{\frac{1}{1}}}{2}+\frac{(b_1b_2)^{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{(b_1b_2b_3)^{\frac{1}{3}}}{4}+\cdots+\frac{(b_1b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1}$$

$$\le\frac{b_1}{1\times2}+\frac{b_1+b_2}{2\times3}+\frac{b_1+b_2+b_3}{3\times4}+\cdots+\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n(n+1)}$$

$$=b_1[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}]+b_2[\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}]+\cdots+b_n\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=b_1(1-\frac{1}{n+1})+b_2(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1})+\cdots+b_n(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$<\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_n}{n}=(1+\frac{1}{1})^1a_1+(1+\frac{1}{2})^2a_2+\cdots+(1+\frac{1}{n})^na_n$$

$$<ea_1+ea_2+\cdots+ea_n=eS_n.$$

即 $T_n<eS_n$.