

2015 年北京高考数学（理科）真题

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 复数 $i(2-i)=$

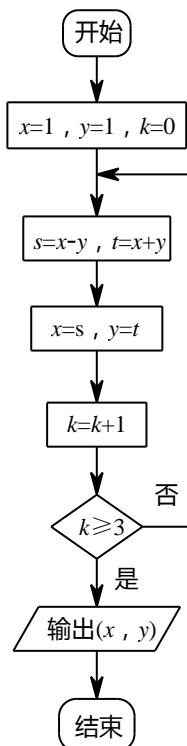
- A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $-1+2i$ D. $-1-2i$

2. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x-y \leq 0, \\ x+y \leq 1, \\ x \geq 0, \end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为

- A. 0 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

3. 执行如图所示的程序框图，输出的结果为

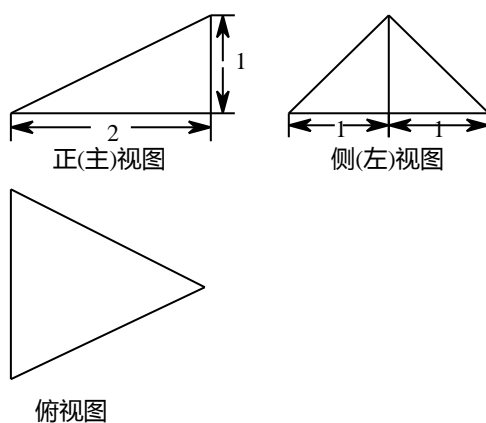
- A. $(-2, 2)$ B. $(-4, 0)$ C. $(-4, -4)$ D. $(0, -8)$



4. 设 α, β 是两个不同的平面， m 是直线且 $m \subset \alpha$ 。“ $m \parallel \beta$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的表面积是

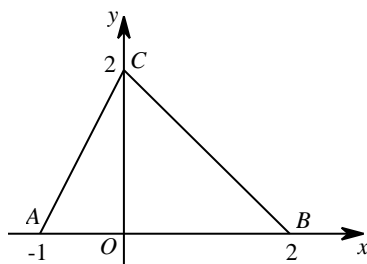


- A. $2 + \sqrt{5}$ B. $4 + \sqrt{5}$ C. $2 + 2\sqrt{5}$ D. 5

6. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列. 下列结论中正确的是

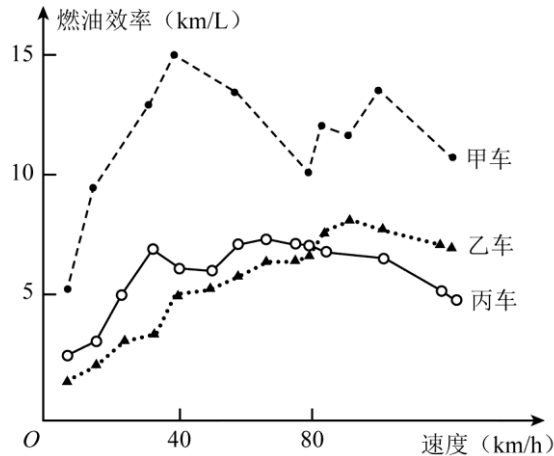
- A. 若 $a_1 + a_2 > 0$, 则 $a_2 + a_3 > 0$ B. 若 $a_1 + a_3 < 0$, 则 $a_1 + a_2 < 0$
 C. 若 $0 < a_1 < a_2$, 则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$ D. 若 $a_1 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

7. 如图, 函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB , 则不等式 $f(x) \geq \log_2(x+1)$ 的解集是



- A. $\{x | -1 < x \leq 0\}$ B. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$
 C. $\{x | -1 < x \leq 1\}$ D. $\{x | -1 < x \leq 2\}$

8. 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程，下图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下的燃油效率情况。下列叙述中正确的是



- A. 消耗 1 升汽油，乙车最多可行驶 5 千米
 B. 以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最多
 C. 甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时，消耗 10 升汽油
 D. 某城市机动车最高限速 80 千米/小时。相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 在 $(2+x)^5$ 的展开式中， x^3 的系数为_____。（用数字作答）
10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + y = 0$ ，则 $a =$ _____。
11. 在极坐标系中，点 $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ 到直线 $\rho(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) = 6$ 的距离为_____。
12. 在 $\triangle ABC$ 中， $a=4$ ， $b=5$ ， $c=6$ ，则 $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$ _____。
13. 在 $\triangle ABC$ 中，点 M ， N 满足 $\overline{AM} = 2\overline{MC}$ ， $\overline{BN} = \overline{NC}$ 。若 $\overline{MN} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ ，则 $x =$ _____； $y =$ _____。
14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1, \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1. \end{cases}$
- ①若 $a=1$ ，则 $f(x)$ 的最小值为_____；
- ②若 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则实数 a 的取值范围是_____。

三、解答题（共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

15.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2}$.

- (I) 求 $f(x)$ 的最小正周期；
(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的最小值.

16.（本小题 13 分）

A, B 两组各有 7 位病人，他们服用某种药物后的康复时间（单位：天）记录如下：

A 组：10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

B 组：12, 13, 15, 16, 17, 14, a

假设所有病人的康复时间互相独立，从 A, B 两组随机各选 1 人，A 组选出的人记为甲，B 组选出的人记为乙.

- (I) 求甲的康复时间不少于 14 天的概率；
(II) 如果 $a = 25$ ，求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率；
(III) 当 a 为何值时，A, B 两组病人康复时间的方差相等？（结论不要求证明）

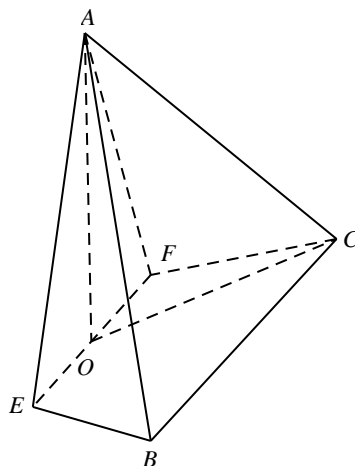
17. (本小题 14 分)

如图, 在四棱锥 $A-EFCB$ 中, $\triangle AEF$ 为等边三角形, 平面 $AEF \perp$ 平面 $EFCB$, $EF \parallel BC$, $BC=4$, $EF=2a$, $\angle EBC = \angle FCB = 60^\circ$, O 为 EF 的中点.

(I) 求证: $AO \perp BE$;

(II) 求二面角 $F-AE-B$ 的余弦值;

(III) 若 $BE \perp$ 平面 AOC , 求 a 的值.



18. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求证: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$;

(III) 设实数 k 使得 $f(x) > k\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

19. (本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(0, 1)$ 和点 $A(m, n) (m \neq 0)$ 都在椭圆 C 上, 直线 PA 交 x 轴于点 M .

(I) 求椭圆 C 的方程, 并求点 M 的坐标 (用 m, n 表示);

(II) 设 O 为原点, 点 B 与点 A 关于 x 轴对称, 直线 PB 交 x 轴于点 N . 问: y 轴上是否存在点 Q , 使得 $\angle OQM = \angle ONQ$? 若存在, 求点 Q 的坐标; 若不存在, 说明理由.

20. (本小题 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 \in \mathbf{N}^*$, $a_1 \leq 36$, 且 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18, \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases} (n=1, 2, \dots)$.

记集合 $M = \{a_n | n \in \mathbf{N}^*\}$.

(I) 若 $a_1 = 6$, 写出集合 M 的所有元素;

(II) 若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数, 证明: M 的所有元素都是 3 的倍数;

(III) 求集合 M 的元素个数的最大值.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)